BOUND STATE SPECTRUM IN INFINITE MOMENTUM FRAME

AUTHOR(S):

小倉, 昭弘

BOUND STATE SPECTRUM IN INFINITE MOMENTUM FRAME

小倉　昭弘　（日大・理工）

1. WKB & Bethe Ansatz

この論文では、Massive Thirring 模型 (MTM) のフェルミオンと反フェルミオンからなる束縛状態の質量スペクトルを議論したい。その質量スペクトルは、1970 年代に二つの別々の方法で求められている。一つは Bethe Ansatz を、もう一つは WKB 法を用いたものである。特に後者は、量子 sine-Gordon 模型 (QSG) との同等性 [1] を通じて解かれている。以下は、２つの模型のラグランジアンである。

$$\mathcal{L}_{MTM} = \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi - \frac{g}{2}j^{\mu}j_{\mu} \tag{1}$$

$$\mathcal{L}_{QSG} = \frac{1}{2}(\partial^{\mu}\phi)(\partial_{\mu}\phi) + \frac{\mu^2}{\beta^2}(\cos\beta\phi - 1) \tag{2}$$

(1) WKB[2]

Dashen 達は、WKB 法を使ってソリトンと反ソリトンからなる束縛状態の質量スペクトルを求めた。WKB 法は、sine-Gordon 模型の古典解を量子化する方法である。古典 dublet 解をϕ_{cl}、そのゆらぎを$\delta\phi$として、次の量を計算する。

$$\mathrm{Tr}\left(e^{-iHT}\right) = e^{iS_{cl}}\int \mathcal{D}\delta\phi \;\; e^{-iS_{\delta}} \tag{3}$$

$$S_{\delta} = \int_0^T dt\int dx\left[(\partial_{\mu}\delta\phi)^2 + \alpha^2\delta\phi^2\cos\beta\phi_{cl}\right]$$

この量は、エネルギー・レベルと以下のように結びつく。

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{H-E}\right) = i\mathrm{Tr}\int_0^{\infty} dT e^{i(E-H)T} \tag{4}$$

こうしてDashen達は、以下のような質量スペクトルを求めた。

$$\mathcal{M} = 2m \sin \frac{\pi}{2} \frac{n}{1 + 2\frac{g'}{\pi}} \tag{5}$$

$$n = 1, 2, 3, ..., 1 + 2\frac{g'}{\pi}$$

ここで、Colemanの同等性[1]により、MTMの言葉に書き直している。

(2) Bethe Ansatz[3]

Bethe仮設法では、最初に波動関数を決める。Massive Thirring模型ではN体の波動関数を次の形とする。

$$\chi(x_1, \ldots, x_N) = \exp\left[\sum_j i k_j x_j\right] \prod_{j<k} [1 - i\lambda_{jk}\ \epsilon(x_j - x_k)] \tag{6}$$

この波動関数を使って、λ_{jk}を適当に選ぶことによって、確かにMassive Thirring模型のハミルトニアンは対角化することができる。次に、この波動関数に、周期的境界条件

$$\chi\left(x_i = -\frac{L}{2}\right) = \chi\left(x_i = \frac{L}{2}\right)$$

をつける。この条件から、運動量に対する条件が決まる。すなわち、

$$k_i = \frac{2\pi}{L} n_i - \frac{1}{L} \sum_j \Delta(k_i - k_j) \tag{7}$$

ここで、(7) 式の連続極限 ($L \to \infty$) をとり、粒子数密度 $\rho(k)$ を求める。この $\rho(k)$ から、エネルギーは以下のように求められる。

$$E = \int dk\ \rho(k)\ \sqrt{k^2 + m^2} \tag{8}$$

こうして、Bergnoff達はDashen達と同じ結果を得た。

2. Analytic Solution[4]

我々は、無限運動量系での計算法（以下、$\frac{1}{K}$展開法と呼ぶ）を、Massive Thirring模型に適用した。$\frac{1}{K}$展開法は、フェルミオンと反フェルミオンからなるボソンの束縛

状態の質量スペクトルを求めるのに有効である。特に、QED2 (Massive Schwinger 模型) では、光円錐量子化法を用いた結果と同じであることが解っている。$\frac{1}{K}$展開法ではまず、フェルミオンと反フェルミオンからなる状態を Fock 空間で作りあげる：

$$|q\bar{q}>=\sum_n a_n^\dagger b_{K-n}^\dagger|0>f_n \tag{9}$$

ここで、Kはこの状態が持っている重心の運動量である。もし、この状態が束縛状態を作っているとしたら、この状態に対するハミルトニアンの期待値は、$\mathcal{M}$ より大きい Kに対して、

$$<q\bar{q}|H|q\bar{q}>=\sqrt{K^2+\mathcal{M}^2}\rightarrow K+\frac{\mathcal{M}^2}{2K}+\ldots(K\rightarrow\infty) \tag{10}$$

と展開される。我々は、この方程式を恒等式とみなし、$\frac{1}{K}$に比例する項から、ボソンの質量 $\mathcal{M}$ に対する固有値方程式を導くのである。

(1) 式から作られるハミルトニアンを使って、ボソンの質量 $\mathcal{M}$ に対する固有値方程式は、

$$\left(\frac{\mathcal{M}}{m}\right)^2=\int_0^1 dx\frac{|f(x)|^2}{x(1-x)}$$
$$-\frac{g}{2\pi}\int_0^1\int_0^1 dxdyf(x)f(y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-y}\right)\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{1-x}\right) \tag{11}$$

と求められた。この固有値方程式の波動関数 $f(x)$ に関する汎関数微分をとると、

$$\left(\frac{\mathcal{M}}{m}\right)^2=\frac{f(x)}{x(1-x)}$$
$$-\frac{g}{2\pi}\int_0^1 dyf(y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-y}\right)\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{1-x}\right) \tag{12}$$

となり、右辺第2項は、Separable Type の相互作用となっている。この式は、解析的に解くことができる。

$$A=\int_0^1 dyf(y),\quad B=\int_0^1 dy\frac{f(y)}{y} \tag{13}$$

と置いて、行列方程式から、

$$\frac{\tan\theta}{\dfrac{\pi}{2}-\theta} = \frac{g}{\pi}\left[1+\frac{1}{\cos^2\theta}\left(1-\frac{g}{4\pi}\right)\right] \tag{14}$$

$$\mathcal{M} = 2m\cos\theta$$

を得る。この固有値方程式は、いくつかの驚くべき特徴を備えている。まず、弱い結合定数の極限では、

$$\mathcal{M} = m\left[2-g^2+4\frac{g^3}{\pi}+O(g^4)\right]$$

となり、摂動計算から求めた解 [5] と一致した。また、強い結合定数の極限では、

$$\mathcal{M} \simeq m\frac{2-\dfrac{g}{\pi}}{\sqrt{\dfrac{2}{3}+\dfrac{g}{\pi}}} \tag{15}$$

となる。この式からわかるように、ボソンの質量 $\mathcal{M}$ は、$\dfrac{g}{\pi} > 2$ では、束縛状態が存在しないことを示している。また、この式を sine-Gordon の言葉で書き直すと、

$$\mathcal{M} \simeq \frac{\beta^2}{2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{\beta^2}{8\pi}\right)\left(1+\dfrac{\beta^2}{4\pi}\right)}} \tag{16}$$

となり、$\beta^2 < 8\pi$ という関係が得られ、これは Coleman の結果 [1] に一致する。さらに、(14) 式からわかることは、Massive Thirring 模型から作られる束縛状態は、唯一つに限られるということである。この結論は、Dashen 達の解 (5) が、多数の束縛状態を予想するのに鋭く矛盾する。

3. Conclusion

我々は、Massive Thirring 模型の束縛状態を議論してきた。しかし、その解は WKB 法や Bethe 仮設法から求めた解とくい違いがあることがわかった。ところが、Dashen 達の解はこれまで長い間、厳密解であると信じられてきた。しかし我々は、WKB 法における経路積分が 2 次までしか取らないことと、Bethe 仮設法において連続極限を

とることによって粒子数密度を求めることが、同じ近似を採用しているのではないかと疑っている。それ故に、2つの方法が同じ質量スペクトルを与えたのだと思われる。上に述べた状況証拠から、我々は、Dashen 達の解の厳密性に疑問を投げかけたい。

この仕事は、藤田丈久氏（日大・理工）との共同研究である。

REFERENCES

[1] S.Coleman, Phys.Rev. **D11** (1975) 2088

[2] R. F. Dashen, B. Hasslacher and A. Neveu, Phys. Rev. **D11** (1975) 3424

[3] H.Bergnoff and H.B.Thacker, Phys. Rev. **D19** (1979) 3666

[4] T. Fujita and A. Ogura, Prog. Theor. Phys. **89** (1993) 23

[5] P.H.Weisz, Nucl. Phys. **B122** (1977) 1